

Simulación en Probabilidad

Definición de Simulación

Simular en probabilidad significa generar realizaciones artificiales de una o varias variables aleatorias usando un algoritmo que reproduce las reglas probabilísticas del modelo.

Formalmente, si X tiene distribución F entonces se generan $X_1, X_2, \dots$ tales que:

- $X_i \sim F$ (idénticamente distribuidos),
- X_i independientes.

Estas realizaciones no provienen de un experimento real, sino de un generador aleatorio.

Validar resultados teóricos

La simulación permite observar convergencias teóricas.

Ejemplo: Teorema Central del Límite.

Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ con $X_i \sim \text{Bernoulli}(0.3)$. Consideramos:

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Al simular para n grande, el histograma de Z_n se aproxima a una normal estándar, como predice el TCL.



Aproximar cantidades sin solución analítica

Por la Ley de los Grandes Números, la media muestral aproxima a la esperanza. Así, para cualquier función $g(X)$,

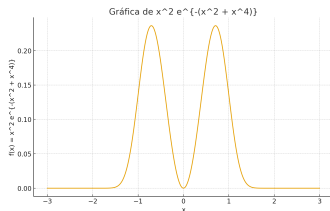
$$E[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

si $X_1, \dots, X_n$ son simulaciones independientes de la distribución de X .

Ejemplo: si X tiene densidad proporcional a $e^{-x^2-x^4}$, calcular $E[X^2]$ es resolver

$$\int x^2 e^{-x^2-x^4} dx,$$

que no tiene solución analítica.



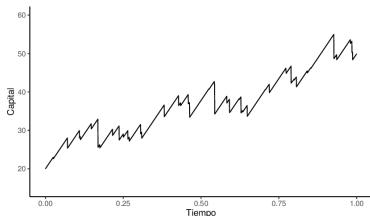
Razón 3: Modelos con múltiples fuentes de incertidumbre

Cuando un fenómeno involucra varias variables aleatorias interdependientes, la simulación captura su complejidad.

Ejemplo: costo total de garantías.

- $N \sim \text{Poisson}(100)$ número de fallas.
- $X \sim \text{Lognormal}(1000, 200^2)$ costo por falla.
- Capital al tiempo t : $C(t) = \pi t - \sum_{i=1}^N X_i$.

La distribución de C para cada t no es analíticamente tractable, pero su distribución empírica simulada converge por Glivenko–Cantelli.



Simulaciones complejas a partir de simples

Fenómenos complejos requieren métodos que construyen distribuciones complicadas desde distribuciones sencillas.

Métodos clásicos:

- Transformada inversa.
- Métodos de rechazo.
- Composición y mezclas.
- Métodos MCMC (Metropolis–Hastings, Gibbs).

